Τρίτο τεστ Απειροστικός Λογισμός 2

Διάρκεια 90 Λεπτά

Στοιχειοθεσία: Δήμογλου Κωνσταντίνος, Μαθηματικός (Msc)

Θέμα 1
Να αιτιολογήσετε γιατί η συνάρτηση $f(x) = x - x^2$ είναι (Riemann) ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[0,1]$ και να υπολογίσετε (μέσω διαμερίσεων) την ακριβή τιμή του ολοκληρώματος

$$\int_0^1 f(x)dx.$$

Θέμα 2 (Πολλαπλής Επιλογής)
Να επιλέξετε **τις σωστές** απαντήσεις για το κάθε ερώτημα (με πλήρη αιτιολόγηση).

(i) Δίνεται φραγμένη συνάρτηση $f\colon [0,2] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 1,\ x \in \mathbb{Q} \cap [0,2]$. Τότε,

  (a) Υπάρχει διαμέριση P του $[0,2]$, ώστε $L(f,P) > 2$.
  (b) Για κάθε διαμέριση P' του $[0,2]$, ισχύει $U(f,P') \geq 2$.
  (c) $\overline{\int_0^2} f(x)dx \geq 2$.
  (d) $\underline{\int_0^2} f(x)dx < 2$.

(ii) Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f\colon [0,2] \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} 1 \quad , & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 \quad , & x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0,1] \\ x \quad , & x \in (1,2] \end{cases}$$

Τότε

  (a) η f δεν είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[1, 3/2]$.
  (b) η f δεν είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[1/2, 3/2]$.
  (c) η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[3/4, 3/2]$.
  (d) ισχύει $\overline{\int_0^1} f(x)\, dx = \underline{\int_1^2} f(x)\, dx$.

(iii) Δίνεται συνάρτηση $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} \cos\left(\dfrac{1}{x^2}\right) & , \quad x \in (0,1] \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

Τότε

  (a) η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[1/2, 1]$.
  (b) η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$.
  (c) η f δεν είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[0, 1/3]$.

Θέμα 3

(i) Αν $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [a,b]$ και $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = 0$, να αποδείξετε ότι $f = 0$.

(ii) Αν $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $\displaystyle\int_a^b f^2(x)dx = 0$, να αποδείξετε ότι $f = 0$.

(iii) Αν για κάθε $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς συνάρτήσεις ισχύει $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$, να αποδείξετε ότι $f = 0$.

(iv) Εξετάστε αν υπάρχει θετική συνεχής συνάρτηση $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$\int_0^1 f(x)dx = 1, \ \int_0^1 xf(x)dx = 2 \ \text{ και } \ \int_0^1 x^2 f(x) = 4$$

(Υπόδειξη: Με άτοπο, μελετήστε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_0^1 (x-2)^2 f(x)dx$ και χρησημοποιήστε το ερώτημα (i))